Soluție

1.a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 3, y_1 = 2$; $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 17, y_2 = 12.$

b)Demonstrăm prin inducție. $x_0 + y_0 \cdot \sqrt{2} = 1, x_1 + y_1 \cdot \sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ .Presupunem adevărat pentru n şi demonstrăm pentru $n+1$.

$x_{n+1} + y_{n+1} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot x_n + 4 \cdot y_n + (2x_n + 3y_n)\sqrt{2} = \left(3+2\sqrt{2}\right) \cdot \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right) = \left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1}$.

c) $\begin{matrix} x_{n+2} = 3 \cdot x_{n+1} + 4 \cdot y_{n+1} \\ y_{n+2} = 2 \cdot x_{n+1} + 3 \cdot y_{n+1} \end{matrix}$; Deci $x_{n+2} - 6 \cdot x_{n+1} + x_n = 0, \forall n \geq 0$.

2.a) $\hat{3}x^2 = \hat{3} \Rightarrow x^2 = \hat{1} \Rightarrow x \in \left\{\hat{1}, \hat{6}\right\}$

b) $\operatorname{ord}\left(\hat{3}\right) = 6$

c) Presupunem că f este un morfism de grupuri. $f\left(\bar{0}\right) = \hat{1}$; $f\left(\bar{0}\right) = f\left(\bar{2} + \bar{2} + \bar{2}\right) = \left(\hat{3}\right)^3 = \hat{6} = \hat{1}$, contradicție.